

Infos: $\diamond$ Siances du soir commencent semaine prochaine.

$\diamond$ Difficulté de l'EPFL.



Définition 1.5

$$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$$

(iii) A est minoré si $\exists x \in \mathbb{R}$ tq $\forall a \in A, x \leq a$

(iv) A est majéré si $\exists x \in \mathbb{R}$ tq $\forall a \in A, x \geq a$.

Exemples 1.7

(i) $A = \mathbb{N}$ est minoré, mais pas majoré.

(ii) $A = \{a \in \mathbb{R} : a \cdot |a| < 2\}$. A est majoré, mais pas minoré.

Réécrivons $a \cdot |a| < 2$:

Cas 1: $a \geq 0$: On a alors, $|a| = a \Rightarrow a \cdot |a| = a^2$ et $a \cdot |a| < 2$
se réécrit $a^2 < 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} < a < \sqrt{2} \rightarrow 0 \leq a < \sqrt{2}$

Lu	CO 120	17h30 - 19h
Ma	CH 121	17h30 - 19h
Me	CO 120	17h30 - 19h
Je	CH 121	18h - 19h30

1 assistante de notre
cours sera présente

Cas 2: $a \leq 0$. On a alors, $|a| = -a$ et donc $a \cdot |a| = -a^2$.

La condition $a \cdot |a| < 2$ devient $-a^2 < 2$ qui est toujours vérifiée, $\rightarrow a < 0$, $a \in]-\infty, 0[$.

Pour finir $A = [0, \sqrt{2}[\cup]-\infty, 0[=]-\infty, \sqrt{2}[= \{a \in \mathbb{R} : a < \sqrt{2}\}$

Donc $x = \sqrt{2}$ est un majorant de A

Montrons encore que A n'est pas minoré.

$\neg (\exists x \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall a \in A, x \leq a)$

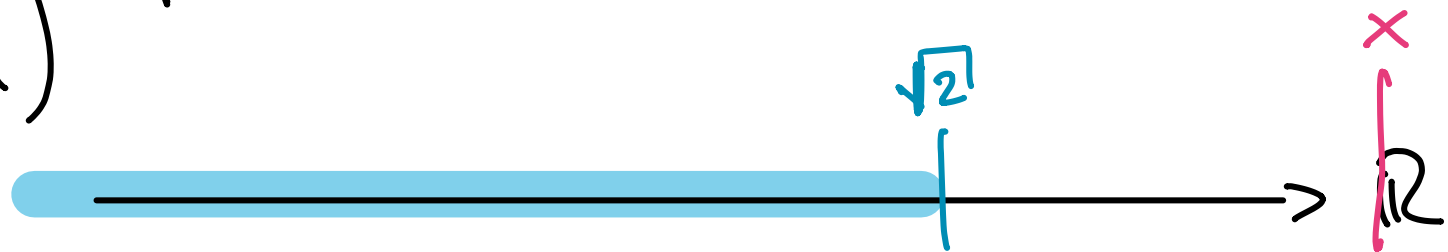
$\forall x \in \mathbb{R}, \neg (\forall a \in A, x \leq a)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in A \text{ tq } x > a$

Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Posons $a = -|x| - 1$.

On a que $a = -|x| - 1 < 0 < \sqrt{2} \Rightarrow a \in A$.

$x \geq -|x| > -|x| - 1 = a$.



Proposition 1.8

Soient $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Alors,
(i) Si B est minoré, A est minoré,
(ii) Si B est majoré, A est majoré.

Théorème 1.9

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

- (i) Si A est minoré, il existe un plus grand minorant, i.e.
 $\exists m \in \mathbb{R}$ qui est un minorant de A et tq $\forall x \in \mathbb{R}$ minorant de A , $m \geq x$.
- (ii) Si A est majoré, il existe un plus petit majorant, i.e.
 $\exists M \in \mathbb{R}$ qui est un majorant de A et tq $\forall x \in \mathbb{R}$ majorant de A , $M \leq x$.

Définition 1.10

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

- (i) Si A est minoré, le plus grand minorant est appelé l'infimum de A et on le note $\inf A$.
- (ii) Si A est majoré, le plus petit majorant est appelé le suprimum de A et on le note $\sup A$.

Théorème 1.11 Caractérisation de $\inf$ et $\sup$.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

- (i) $x = \inf A$ si et seulement si

$\forall a \in A, x \leq a$ & $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tq $a \leq x + \varepsilon$
(x est un minorant) (x est le plus grand des mineurs)

- (ii) $x = \sup A$ si et seulement si

$\forall a \in A, x \geq a$
(x est un majorant)

& $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tq $a \geq x - \varepsilon$
(x est le plus petit des majorants)



Exemple 112

(i) $A = \mathbb{N}$. Montrons que $\inf \mathbb{N} = 0$.

L'aspect $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq n$, est ok.

Montrons $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tq $n \leq 0 + \varepsilon = \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $n = 0$. Alors,

$n = 0 < \varepsilon$, qui est le résultat voulu.

(ii) $A =]-\infty, 1[= \{a \in \mathbb{R} : a < 1\}$.

Montrons que $\sup A = 1$.

Le fait que 1 est un majorant se lit dans la def de A

Montrons encore que $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tq $a \geq 1 - \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $a = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, $a < 1$, donc $a \in A$. Et,

$$1 - \varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < 1 - \frac{\varepsilon}{2} = a$$

⚠ la notion "élément "juste à gauche" de 1 n'existe pas dans $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

$$x < y \rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$$

Jeu du vérificateur / Falsificateur : Prenons $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tq $a \geq 1 - \varepsilon$.

$\forall \rightarrow$ tour de jeu du falsificateur

$\exists \rightarrow$ tour de jeu du vérificateur

Si à la fin $a \geq 1 - \varepsilon \rightarrow$ Vérificateur gagne, Si $a < 1 - \varepsilon$ Falsificateur gagne.

Proposition 1.13

Soit $A \subseteq B$, $A \neq \emptyset$. Alors,

(i) si B est minoré $\inf A \geq \inf B$

(ii) si B est majoré $\sup A \leq \sup B$.

Définition 1.14 (min/max)

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

(i) On dit que A admet un minimum si $\exists m \in A$ tq $\forall a \in A$, $a \geq m$.
On note alors, $m = \min A$.

(ii) On dit que A admet un maximum si $\exists M \in A$ tq $\forall a \in A$, $a \leq M$.
On note alors, $M = \max A$.

Remarque 1.15:

(i) On peut reformuler: A admet un minimum (resp. un maximum) si un élément de A est un minorant (resp. majorant)

(ii) On peut voir que A admet un maximum (resp. minimum) si et seulement si $\sup A \in A$ (resp. $\inf A \in A$)

comparer def
minoré/majoré

On a alors, $\max A = \sup A$ (resp. $\min A = \inf A$)

(iii) Un ensemble fini a toujours un max et un min.

(iv) Un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ a toujours un minimum.

Exemples 1.16

(i) $A = \mathbb{N}$. On a vu $\mathbb{N}$ pas majoré $\Rightarrow \mathbb{N}$ admet pas de max.

On a vu que $0 = \inf \mathbb{N}$. $0 \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 = \min \mathbb{N}$.

(ii) $A =]-\infty, 1[$. A pas minoré $\Rightarrow A$ n'admet pas de minimum.

On a vu $\sup A = 1$. $1 \notin A \Rightarrow A$ n'admet pas de maximum.

Notation 1.17

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) Si A n'est pas minoré, on écrit $\inf A = -\infty$

(ii) Si A n'est pas majoré, on écrit $\sup A = +\infty$.

Remarque 1.18

Ecrire $\sup A = +\infty$ (resp. $\inf A = -\infty$) ne veut pas dire que le suprénum de A existe (respectivement $\inf A$ existe)